

Contrôle Continu 2 - Algèbre 2

07/05/2026 - 1 heure - Documents interdits

Toutes les réponses devront être justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif.

Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours (6pts)

1 - (2 pts) Donner la définition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ un corps. Donner un exemple de polynôme sans racines non irréductible. Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré 3 est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racines.

2 - (2 pts) Soit A un anneau et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme de $A[X]$. On note C_P la matrice compagnon associée :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est P .

3 - (2 pts) Énoncer le théorème de décomposition de Dunford pour $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Exercice 2 : Vrai/faux (6 pts)

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux. **Toutes les réponses doivent être justifiées pour rapporter des points.**

1 - (1.5 pts) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{2026} = 0$. Alors $M^n = 0$.

2 - (1.5 pts) Soit $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et de déterminant 1. Alors $(\text{SL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

3 - (1.5 pts) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

4 - (1.5 pts) Si deux matrices ont le même polynôme caractéristique alors elles sont semblables. *Bonus plus difficile (1pt bonus) : Si deux matrices ont le même polynôme minimal, sont-elles semblables ?*

Exercice 3 : (8 pts)

Soient A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme.

1 - (2 pts) On note $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ le spectre de A . Montrer que $\text{Sp}(P(A)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\}$. *Indication : on pourra, en justifiant qu'on a le droit de le faire, trigonaliser A .*

2 - (2 pts) Montrer que $P(A)$ est inversible si et seulement si le polynôme P est premier avec μ_A le polynôme minimal de A .

3 - (2 pts) Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Décrire le spectre de N (et donner une démonstration du résultat).

4 - (2 pts) On décompose le polynôme minimal de A :

$$\mu_A(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i},$$

où les λ_i sont deux-à-deux distincts. Montrer que $P(A)$ est nilpotente si et seulement si le polynôme $\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$ divise le polynôme P .